

ANÁLISE DA CONDUÇÃO TÉRMICA EM DISSIPADORES DE CALOR UTILIZANDO O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS GENERALIZADAS / THERMAL CONDUCTION ANALYSIS IN HEAT SINKS USING THE GENERALIZED FINITE DIFFERENCE METHOD

Roberto Melo Knop¹, Douglas Martins Rocha²

¹Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil — robertoknop1@gmail.com

²Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil — douglas.rocha@ufjf.br

Recebido em: 11/12/2025 | Aprovado em: 22/01/2026 | Publicado em: 03/02/2026

Resumo / Abstract

Este trabalho apresenta a implementação e análise da condução térmica em um dissipador de calor aletado de alumínio empregando o Método de Diferenças Finitas Generalizadas (MDFG). Trata-se de uma abordagem sem malha, na qual o domínio é discretizado por uma nuvem de pontos irregulares obtida via *Poisson Disk Sampling*. A solução numérica foi desenvolvida em Python, utilizando *k-d tree* para otimização da busca de vizinhos e um esquema de Mínimos Quadrados Ponderados com estrelas de 9 nós para estabilidade numérica. O modelo físico é descrito pela Equação de Laplace em regime permanente, com condições de contorno de Neumann na base e Robin nas aletas. A validação em uma placa plana mostrou forte concordância com a solução analítica, com erros restritos às regiões de borda. A aplicação ao dissipador e o pós-processamento com mascaramento geométrico permitiram visualizar os gradientes térmicos com alta fidelidade, demonstrando a eficiência e versatilidade do MDFG para problemas avançados de engenharia térmica.

Palavras-chave: MDFG; Métodos sem malha; Dissipador de Calor; Simulação Numérica; Python.

This work presents the implementation and analysis of thermal conduction in an aluminum finned heat sink using the Generalized Finite Difference Method (GFGM). The approach is meshless, with the domain discretized by an irregular point cloud generated through Poisson Disk Sampling. The numerical solution was developed in Python, employing a *k-d tree* structure for efficient neighbor searching and a Weighted Least Squares scheme with 9-node stencils to ensure numerical stability. The physical model is based on the steady-state Laplace equation, with Neumann boundary conditions at the base and Robin conditions on the fins. Validation on a flat plate showed excellent agreement with the analytical solution, with errors confined to edge singularities. Application to the

heat sink, combined with geometric masking for post-processing, enabled detailed visualization of temperature gradients, confirming the efficiency and flexibility of GFDM for advanced thermal engineering applications.

Keywords: GFDM; Meshless methods; Heat Sink; Numerical Simulation; Python.

1. Introdução / Introduction

O gerenciamento térmico tornou-se um desafio crítico no projeto de sistemas mecânicos e eletrônicos modernos. A dissipação inadequada de calor não apenas compromete a eficiência operacional, mas reduz drasticamente a confiabilidade e a vida útil dos componentes. Com a demanda contínua por miniaturização e aumento da densidade de potência, fluxos de calor podem exceder a marca de 100 W/cm^2 , um limite que desafia as tecnologias de resfriamento convencionais baseadas apenas em convecção natural ou dissipadores simples, conforme apontado por Leng et al. (2015). Nesse cenário, o estudo de superfícies estendidas (aletas) e microcanais emergem como soluções fundamentais, exigindo ferramentas de simulação robustas para sua otimização (TUCKERMAN e PEASE, 1981; SRIDHAR et al., 2013).

Tradicionalmente, simulações numéricas desses sistemas recorrem ao Método das Diferenças Finitas (MDF) ou ao Método dos Elementos Finitos (MEF). Embora o MEF seja amplamente utilizado devido à sua versatilidade geométrica, ele apresenta desvantagens significativas relacionadas à etapa de pré-processamento para a geração de malha (discretização do domínio). Ferreira e Ribeiro (2016) destacam que a construção de malhas de qualidade em geometrias complexas pode ser computacionalmente onerosa e consumir um tempo considerável do analista. Por outro lado, o MDF clássico, apesar de sua simplicidade matemática, é limitado pela exigência de malhas estruturadas e uniformes, dificultando a aplicação direta em contornos irregulares sem o uso de transformações de coordenadas complexas (BENITO et al., 2001).

Como alternativa para superar as limitações impostas pela conectividade de malha, os métodos numéricos sem malha (*meshless*) ganharam destaque nas últimas décadas. Dentre eles, o Método de Diferenças Finitas Generalizadas (MDFG) apresenta-se como uma técnica promissora. O MDFG estende a simplicidade da expansão em série de Taylor do método clássico para nuvens de pontos distribuídos arbitrariamente no domínio (LISZKA e ORKISZ, 1980). Essa abordagem elimina a rigidez topológica de malhas cartesianas e permite o refinamento local em regiões de alto gradiente térmico sem o custo computacional de regenerar uma malha global de elementos, conforme

demonstrado em aplicações recentes para condução de calor (GU et al., 2017) e biotransferência de calor (ROCHA et al., 2019).

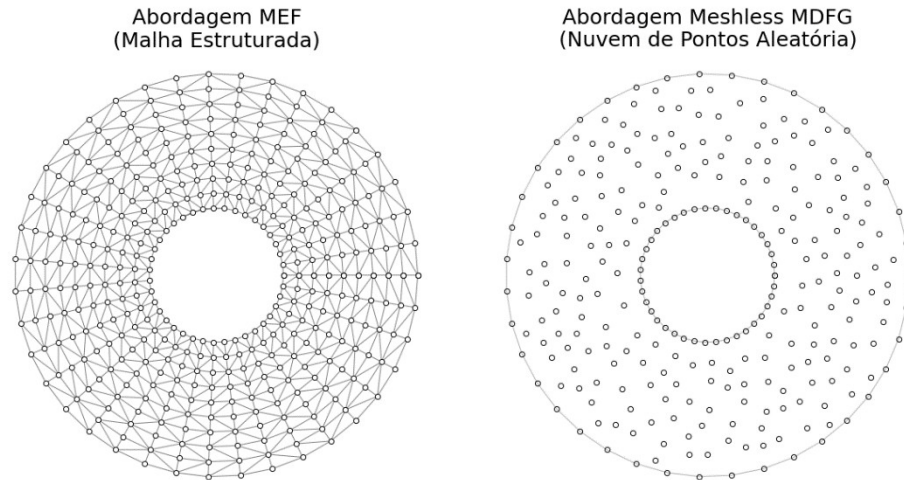


Figura 1 – Malha de elementos finitos versus nuvem de pontos sem malha. / Figure 1 – Finite element mesh versus meshless point cloud.

Para exemplificar a flexibilidade topológica mencionada, a Figura 1 apresenta um comparativo visual entre as técnicas de discretização. Nota-se o contraste entre a rigidez da malha de elementos finitos e a liberdade da distribuição nodal no método sem malha. A ausência de conectividade pré-definida no MDFG simplifica substancialmente a representação computacional do domínio, eliminando as restrições geométricas impostas pela geração de malhas convencionais.

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo implementar e analisar numericamente o comportamento térmico de um dissipador de calor aletado de alumínio utilizando o Método de Diferenças Finitas Generalizadas. A simulação foi desenvolvida em ambiente computacional utilizando a linguagem Python, explorando bibliotecas de computação científica para a resolução de sistemas lineares esparsos. O estudo busca validar a aplicação do MDFG em problemas de difusão térmica com condições de contorno de Neumann e Robin, demonstrando a eficácia do método como uma ferramenta ágil e precisa para a engenharia térmica, capaz de lidar com a geometria de múltiplas aletas sem a necessidade de malhas estruturadas.

2. Metodologia / Methodology

A metodologia deste trabalho foi estruturada de forma progressiva, alinhando a fundamentação teórica dos métodos sem malha com o desenvolvimento de ferramentas computacionais próprias. O processo seguiu uma sequência lógica de revisão bibliográfica,

formulação matemática, implementação numérica, validação em casos fundamentais e, por fim, a aplicação na geometria do dissipador de calor.

A primeira etapa consistiu no estudo das limitações dos métodos numéricos tradicionais frente aos desafios do gerenciamento térmico moderno. Conforme discutido por Ferreira e Ribeiro (2016), métodos baseados em malha, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), impõem um custo computacional significativo na etapa de pré-processamento para a geração de malhas de qualidade em domínios irregulares. Em contrapartida, o Método de Diferenças Finitas Generalizadas (MDFG), fundamentado nos trabalhos pioneiros de Liszka e Orkisz (1980), permite a discretização do domínio através de uma nuvem de pontos arbitrária, eliminando a rigidez topológica dos grids estruturados do MDF clássico. Para garantir a precisão e estabilidade numérica desta abordagem, adotaram-se os critérios paramétricos estabelecidos por Benito et al. (2001), especificamente no que tange à seleção de estrelas de nós e funções de ponderação para evitar singularidades locais.

2.1 Formulação Matemática

O fenômeno físico abordado é a difusão térmica em regime permanente em sólidos isotrópicos. Assumindo ausência de geração interna de calor, a conservação de energia no domínio sólido é governada pela Equação de Laplace ($\nabla^2 T = 0$), conforme as definições clássicas de condução de calor apresentadas por Kakaç et al. (2018). A modelagem do dissipador exigiu a aplicação de condições de contorno de segunda e terceira espécie. Na base do dissipador, impôs-se uma condição de Neumann não-homogênea, prescrevendo um fluxo de calor constante (q'') na interface de contato com a fonte de calor. Nas superfícies das aletas, aplicou-se a condição de Robin, representando a troca térmica por convecção com o ar ambiente. Esta condição acopla a temperatura da superfície (T_s) ao gradiente normal através do coeficiente de convecção (h), segundo a Lei de Resfriamento de Newton.

A implementação numérica foi realizada em ambiente Python, estruturada sobre um algoritmo flexível capaz de adaptar a conectividade nodal à complexidade da geometria simulada. A etapa fundamental do método consiste em estabelecer a conectividade local em uma nuvem de pontos desordenada. Para otimizar este processo, utilizou-se a estrutura de dados espacial *k-d tree* (*k-dimensional tree*), implementada na biblioteca *SciPy*. Esta estrutura particiona o espaço geométrico hierarquicamente, permitindo a busca dos vizinhos mais próximos com complexidade logarítmica. Uma vez definida a vizinhança, a aproximação das derivadas parciais em cada nó i baseia-se na expansão em série de Taylor truncada na segunda ordem para um conjunto de k vizinhos:

$$\begin{bmatrix} h_1 & k_1 & h_1^2/2 & k_1^2/2 & h_1 k_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_k & k_k & h_k^2/2 & k_k^2/2 & h_k k_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial_x T \\ \partial_y T \\ \partial_{xx} T \\ \partial_{yy} T \\ \partial_{xy} T \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} T_1 - T_i \\ \vdots \\ T_k - T_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Este sistema local, da forma $\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta T \end{bmatrix}$, é resolvido através da Pseudo-Inversa de Moore-Penrose $\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \Delta T \end{bmatrix}$. Esta abordagem matemática permitiu a utilização de duas estratégias distintas dentro do mesmo projeto computacional: a estrela menor ($k=5$) para geometrias regulares e a estrela estendida ($k=9$) para geometrias irregulares, onde o sistema torna-se sobredeterminado e a solução via Mínimos Quadrados Ponderados atua como um filtro para erros numéricos decorrentes da assimetria da malha. A partir dos coeficientes locais, constrói-se a matriz global de rigidez $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$ em formato esparsa (*Compressed Sparse Row*), otimizando o armazenamento e a resolução do sistema global $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$. É importante ressaltar que a montagem desse sistema reflete diretamente a discretização da equação da difusão térmica bidimensional em regime permanente sem geração de calor (Equação de Laplace). Os coeficientes obtidos localmente são combinados para satisfazer a condição física de que a soma das derivadas segundas espaciais deve ser nula, garantindo a conservação de energia no volume de controle infinitesimal representado por cada nó.

2.2 Validação Numérica

Como etapa preliminar de familiarização e validação do código computacional, simulou-se o problema clássico de condução bidimensional em uma placa retangular de dimensões $2 \times 1 \text{ m}$. O domínio foi discretizado por uma nuvem de pontos gerada via *Poisson Disk Sampling* ($d_{\min} = 0,05 \text{ m}$). É importante ressaltar que a geração de pontos interna é um processo distinto da geração de pontos externa. Esta última é crucial, pois é responsável por dar forma ao objeto simulado com dimensões e características rigorosamente predefinidas, e não de forma aleatória. Esta metodologia se aplica a todos os objetos simulados com este método. As condições de contorno foram definidas como temperatura prescrita $T_0 = 100^\circ \text{C}$ na face lateral direita ($x=a$) e nula ($T=0$) nas demais. Tal configuração corresponde a um arranjo didático amplamente empregado na literatura especializadas em problemas de transferências de calor desta natureza. A adoção desse cenário permite avaliar a solução obtida pelo MDFG por meio da comparação com resultados analíticos já consolidados e amplamente aceitos. Portanto, para a verificação da precisão do método numérico, a solução computacional foi comparada à solução analítica apresentada por Kakaç et al. (2018), a qual é

formulada para condições de contorno idênticas às consideradas na simulação do presente trabalho, conforme ilustrado na Figura 2.

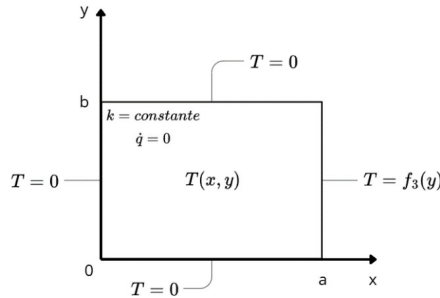


Figura 2 – Seção transversal de uma barra infinita com condições de contorno (Adaptado: KAKAÇ, 2018).

/ Figure 2 – Cross-section of an infinite bar with boundary conditions (Adapted: KAKAÇ, 2018).

$$T(x, y) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}\right)x \sin\left(\frac{n\pi}{b}\right)y}{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}\right)a} \int_0^b f_3(y') \sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dy' \quad (2)$$

No caso particular adotado neste estudo, em que $f_3(y) = T_0$ é constante, a integral reduz-se a coeficientes C_n não nulos apenas para n ímpares, resultando na expressão simplificada efetivamente implementada:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \quad (3)$$

$$C_n = \frac{2}{b} \int_0^b f_3(y') \sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right) dy' \quad (4)$$

$$C_n = \frac{2T_0}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{2T_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{4T_0}{n\pi}, & n \text{ ímpar}, \\ 0, & n \text{ par}. \end{cases} \quad (5)$$

$$T(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \quad (6)$$

Para a análise visual dos resultados, foi necessária uma etapa de pós-processamento para converter a solução discreta (nuvem de pontos) em um campo contínuo. Para isso, gerou-se uma

malha auxiliar estruturada de alta resolução sobrepondo o domínio. Os valores de temperatura obtidos nos nós irregulares do MDFG foram então interpolados para esta grade regular utilizando o método de interpolação cúbica, conforme implementado na função *griddata* da biblioteca *SciPy*. Este procedimento permitiu a reconstrução suave das isotermas, facilitando a comparação direta com o comportamento físico esperado.

Para a geração do mapa de erro, a solução analítica foi avaliada exatamente nas mesmas coordenadas nodais da malha interpolada, contrastando resultados analíticos com os obtidos pelo MDFG. O erro avaliado corresponde à subtração ponto a ponto no campo de temperatura, definida como o erro absoluto $|T_{analítico} - T_{MDFGinterpolado}|$.

2.3 Modelagem do Dissipador e Parâmetros da Simulação

Após validação do método numérico empregado, a metodologia foi estendida para a modelagem do dissipador aletado, incorporando refinamentos para garantir estabilidade nas fronteiras irregulares. A geometria foi definida com dimensões totais de $40,0 \times 20,0 \text{ mm}$, conforme ilustrado na Figura 3. O componente possui uma base sólida de $4,2 \text{ mm}$ e 10 aletas retangulares verticais de $1,3 \text{ mm}$ de largura. Para atenuar as limitações de borda, implementou-se um algoritmo de geração de pontos com zona de proteção (*buffer*) de fronteira. Este mecanismo define uma margem de segurança interna ($0,2 \text{ mm}$) adjacente a todas as superfícies sólidas, assegurando que nenhum nó interno seja gerado arbitrariamente muito próximo aos nós de contorno. Adicionalmente, a rotina de geração de pontos foi aprimorada com uma verificação geométrica robusta, impondo uma restrição estrita de distância mínima ($d_{min}=0,3 \text{ mm}$) para prevenir a sobreposição de pontos nas regiões estreitas das aletas.

As condições de contorno foram implementadas considerando a física vetorial do problema. Na base do dissipador ($y=0$), aplicou-se a condição de Neumann para fluxo prescrito (q''). Para todas as demais superfícies sólidas (laterais e topo das aletas), aplicou-se a condição de Robin para simular a convecção (h). A implementação computacional desta condição exigiu o cálculo explícito dos vetores normais unitários $n=(n_x, n_y)$ em cada ponto de fronteira para decompor a derivada normal.

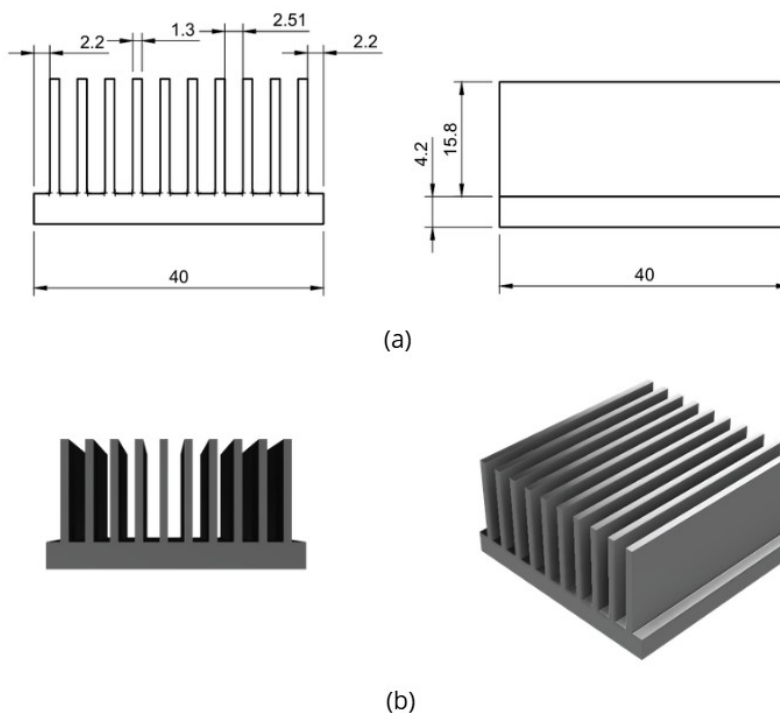


Figura 3 – Definição geométrica do dissipador de calor: (a) Desenho técnico da seção transversal; (b) Representação tridimensional. / Figure 3 – Geometric definition of the heat sink: (a) Technical drawing of the cross-section; (b) Three-dimensional representation.

As propriedades termofísicas de condução e convecção foram selecionadas com base em Incropera et al. (2007). A condutividade do alumínio utilizada é $k_{Al} = 237 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ e os valores do coeficiente de transferência de calor por convecção estão exibidos na Tabela 1. Assumiu-se também a temperatura do ar como $T_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$.

Tabela 1 – Valores típicos do coeficiente de transferência de calor por convecção (INCROPERA, 2007). / Table 1 – Typical values of convective heat transfer coefficient (INCROPERA, 2007).

Processo (Gases)	$h \text{ [W}/(\text{m}^2 \text{ K})]$
Convecção Natural	2 – 25
Convecção Forçada	25 – 250

O fluxo térmico da base foi variado com base em valores que representassem diferentes chips e processadores, de modo a avaliar o comportamento da dissipação de calor em diferentes aplicações. Esses valores de referência são formalmente definidos pelas fabricantes para guiar o projeto do sistema de resfriamento. Tradicionalmente, utilizava-se o *Thermal Design Power* (TDP), que estabelece a potência térmica máxima (em Watts) que a solução de resfriamento precisa dissipar em

condições de carga máxima (BHUTANI et al., 2018). Contudo, a Intel adotou o termo *Processor Base Power* (PBP) para suas gerações mais recentes, que serve a um propósito análogo, indicando o consumo de energia e o limite térmico do chip quando operando em sua frequência base garantida. O PBP é fundamental para dimensionar o resfriamento de modo a evitar o estrangulamento térmico (*thermal throttling*) e garantir a estabilidade do sistema.

Para ilustrar a variação de potência entre diferentes segmentos de mercado e gerações de processadores Intel, a Tabela 2 apresenta o valor de TDP ou PBP (conforme o modelo) de alguns exemplos notáveis, com dados extraídos diretamente do portal de especificações da fabricante (Intel ARK). Essa comparação permite evidenciar não apenas a evolução arquitetural ao longo dos anos, mas também as diferenças de posicionamento entre linhas voltadas para baixo consumo, uso geral e alto desempenho.

Tabela 2 – Valores de Potência Térmica de Design (TDP/PBP) de Processadores (INTEL, 2025). / Table 2 – Thermal Design Power (TDP/PBP) values for Processors (INTEL, 2025).

Modelo do Processador	Valor de Potência [W]
Core i5-10400F	65
Core i7-13700H (Mobile)	45
Core i9-14900K	125

Outro parâmetro de extrema importância para a avaliação da dissipação térmica em processadores é a Temperatura de Junção ($T_{Junction}$). Este valor, disponibilizado pelas fabricantes em suas especificações técnicas, representa a temperatura máxima absoluta que o die (núcleo de silício) do processador pode atingir antes que o mecanismo de proteção térmica seja acionado para reduzir a frequência e, consequentemente, o calor gerado, prevenindo danos permanentes ao chip.

Para os processadores Intel Core de alto desempenho das gerações recentes, o limite é consistentemente estabelecido em 100°C (INTEL, 2025). A manutenção da temperatura do componente abaixo deste limite é o objetivo central de qualquer solução de resfriamento, garantindo a estabilidade e a performance sustentável durante as aplicações de carga máxima.

Na análise final, desenvolveu-se uma rotina de pós-processamento gráfico com interpolação espacial e mascaramento geométrico (*masking*). Esta técnica permitiu gerar mapas térmicos contínuos que respeitam as fronteiras irregulares das aletas, atribuindo valores nulos às regiões de ar entre elas, possibilitando a visualização exclusiva do gradiente térmico no material sólido.

3. Resultados e Discussão / Results and Discussion

A validação da aplicação do Método de Diferenças Finitas Generalizadas (MDFG), baseada na solução analítica, para a análise do dissipador de calor aletado de alumínio demonstrou a viabilidade e a precisão do método sem malha em problemas complexos de transferência de calor. A Figura 4 apresenta os resultados iniciais obtidos para a etapa de validação: (a) a solução direta nos nós pelo MDFG; (b) o campo interpolado resultante, ambas obtidas com a geração de pontos alvo em 600 unidades.

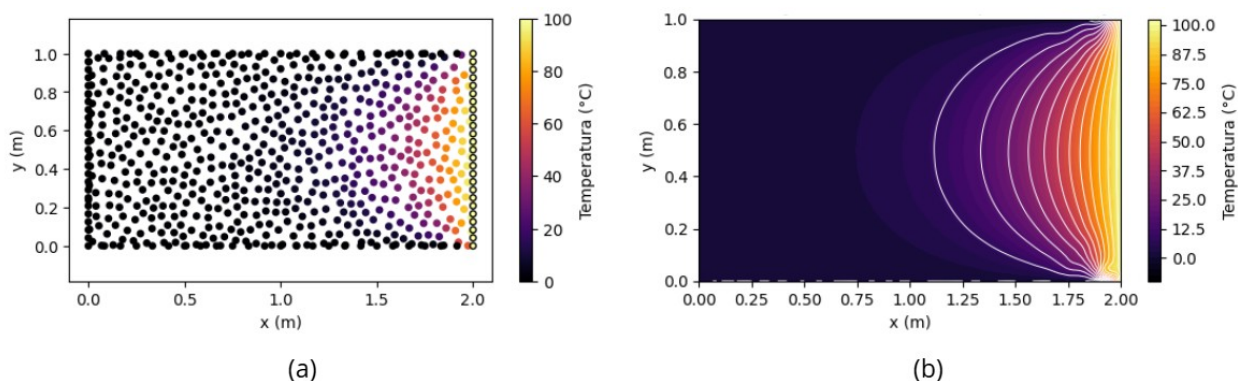


Figura 4 – Campo de temperatura obtido pelo MDFG na placa plana ($k=5$): (a) Distribuição de temperatura nos pontos discretos; (b) Campo térmico interpolado. / Figure 4 – Temperature field obtained by GFDM on the flat plate ($k=5$): (a) Temperature distribution at discrete points; (b) Interpolated thermal field.

A análise visual e quantitativa do mapa da Figura 5, por sua vez, revela que o erro se mantém em magnitudes reduzidas (virtualmente nulo) na vasta maioria do domínio, confirmando a precisão do MDFG para problemas de difusão. As únicas discrepâncias significativas observadas concentram-se estritamente nos vértices da face aquecida. Este desvio local não reflete uma falha do método numérico, mas sim a singularidade matemática inerente à condição de contorno de Dirichlet nestes pontos (descontinuidade abrupta entre $T=100^{\circ}\text{C}$ e $T=0^{\circ}\text{C}$, a qual a série de Fourier analítica também tem dificuldades de representar (fenômeno de Gibbs). A baixa magnitude do erro global valida a robustez do algoritmo para a etapa seguinte de aplicação na geometria complexa.

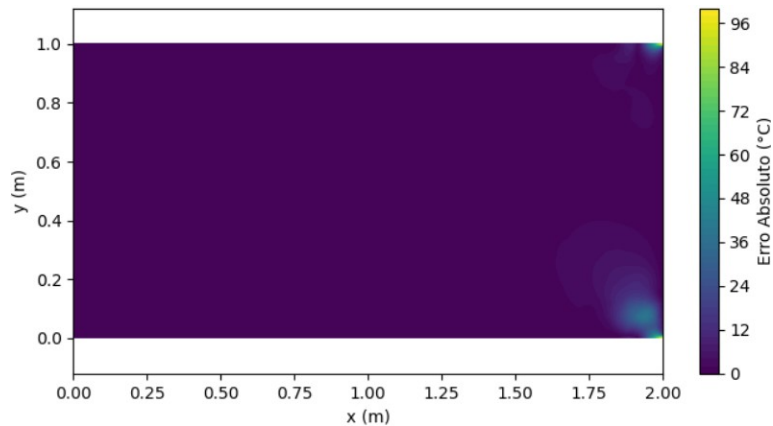


Figura 5 – Mapa de erro absoluto entre a solução analítica e o MDFG. / Figure 5 – Absolute error map between the analytical solution and GFD.

A simulação do dissipador foi conduzida sob condições que mimetizam de forma simplificada o ambiente operacional de processadores modernos, variando a potência térmica (fluxo de calor na base) e o coeficiente de convecção (h_{ar}) para avaliar a margem de segurança térmica do projeto.

No primeiro cenário, adotou-se o valor de potência térmica de 45 W, representativo de processadores móveis de alto desempenho (como o Core i7-13700H), e um coeficiente de convecção forçada moderada de $h_{ar}=50 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, um valor conservador para sistemas de arrefecimento ativos (como *water coolers* e ventoinhas dedicadas). A discretização do domínio foi realizada com uma nuvem de 3021 pontos, garantindo a reprodutibilidade dos resultados através do uso de sementes (*seeds*) na geração dos pontos. Tal quantitativo, que compreende a soma de 2500 pontos internos aos nós de contorno que definem a geometria do dissipador, foi estabelecido com base na análise de sensibilidade de malha apresentada na Figura 6. Conforme se observa no gráfico de convergência, as oscilações numéricas foram mitigadas e a temperatura máxima, presente nos pontos da base do dissipador, estabilizou-se a partir de 2500 pontos internos, demonstrando a independência da malha e validando a confiabilidade dos resultados para a configuração adotada.

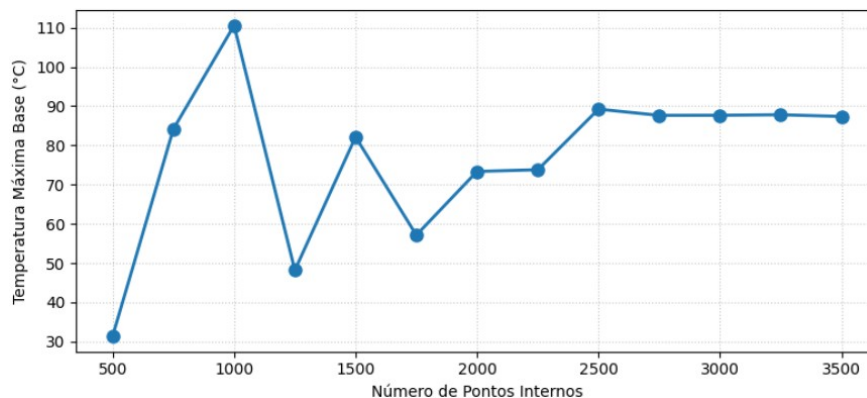


Figura 6 – Análise de convergência de malha: temperatura máxima da base em função do número de pontos internos. / Figure 6 – Mesh convergence analysis: maximum base temperature as a function of the number of internal points.

Os resultados obtidos (Figura 7) indicaram que, mesmo sob essas condições, as temperaturas máximas na base do dissipador ($87,7^{\circ}\text{C}$) se aproximam da Temperatura de Junção crítica de 100°C estabelecida pelo fabricante (INTEL, 2025). Este achado é crucial, pois sugere que o dissipador, nestas condições, opera próximo ao seu limite de segurança térmica para este nível de potência.

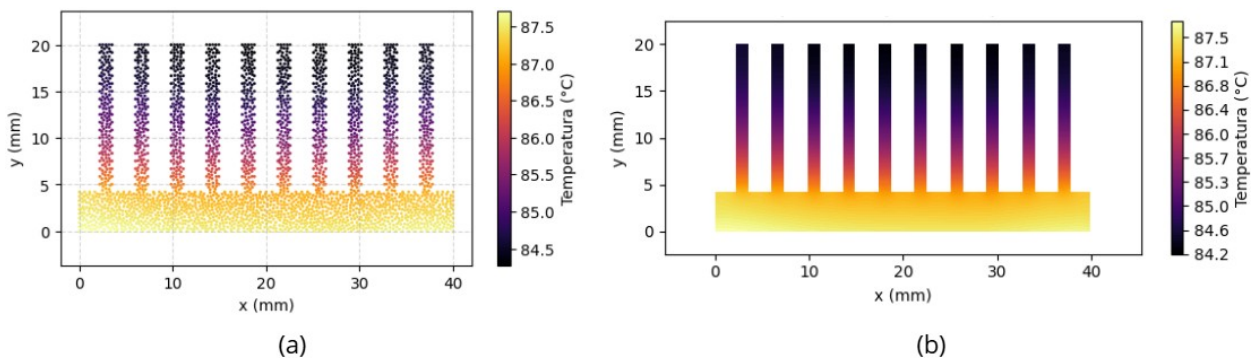
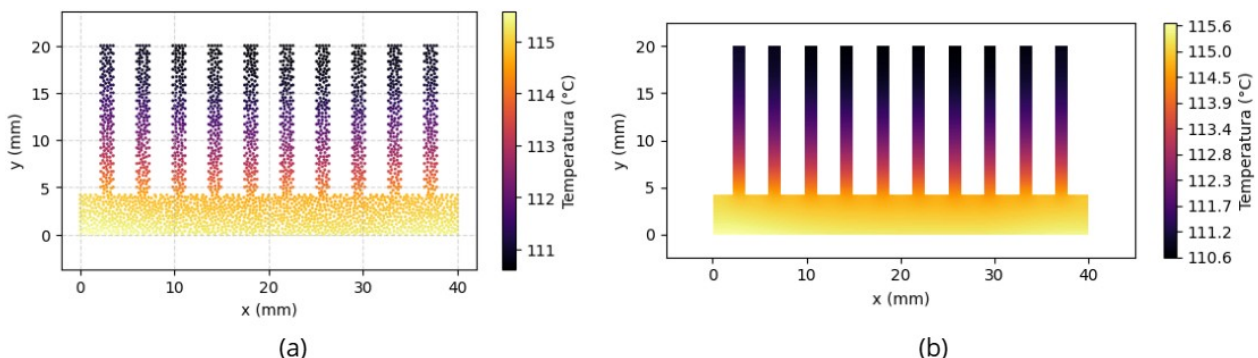


Figura 7 – Simulação do Dissipador de Calor para 45 W : (a) Distribuição de temperatura nos 3021 pontos gerados; (b) Campo térmico interpolado com a aplicação da máscara. / Figure 7 – Heat Sink Simulation for 45 W: (a) Temperature distribution at the 3021 generated points; (b) Interpolated thermal field with mask application.

Ao aumentar o fluxo térmico para 65 W (representativo de um Core i5-10400F), mantendo o coeficiente de convecção em $h_{ar} = 50 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$, a simulação (Figura 8) revelou que os valores de temperatura obtidos (máxima de $115,6^{\circ}\text{C}$) excedem o limite térmico do processador. Este resultado



demonstra que o sistema de resfriamento, tal como modelado, é inadequado para a dissipação exigida, comprometendo a integridade do equipamento. Assim, torna-se claro que, para operar dentro das faixas seguras de temperatura, seria necessário empregar um sistema de resfriamento capaz de fornecer coeficientes de transferência de calor (CTC) significativamente maiores, seja por meio de maior velocidade do ar, uso de ventiladores mais eficientes ou a otimização geométrica das aletas, avaliando a quantidade, espessura e disposição das mesmas ao longo do dissipador, de modo a maximizar sua eficiência e permitir um incremento na transferência de calor observada.

Figura 8 – Simulação do Dissipador de Calor para 65 W : (a) Distribuição de temperatura nos 3021 pontos gerados; (b) Campo térmico interpolado com a aplicação da máscara / Figure 8 – Heat Sink Simulation for 65 W : (a) Temperature distribution at the 3021 generated points; (b) Interpolated thermal field with mask application.

Tal ponto ressalta a importância da flexibilidade do MDFG para o projeto e diagnóstico. A capacidade de rapidamente alterar parâmetros geométricos ou de contorno sem a necessidade de regeneração de malha complexa permite uma otimização ágil do projeto. Para ilustrar esse potencial, a Figura 9 apresenta simulações do dissipador sob as mesmas solicitações térmicas da Figura 8, porém com alterações geométricas distintas: (a) arranjo com 11 aletas; e (b) arranjo com 12 aletas e redução da espessura para $1,2\text{ mm}$, visando otimizar a distribuição espacial sem alterar a largura total do conjunto. Observou-se uma redução nas temperaturas máximas em ambos os casos, atingindo $105,2^{\circ}\text{C}$ e $96,4^{\circ}\text{C}$, respectivamente. Esse comportamento é consistente com o aumento da área de troca térmica proporcionado pelas novas geometrias. Contudo, deve-se ressaltar que alterações no domínio físico implicam na reconfiguração da nuvem de pontos. O monitoramento rigoroso da qualidade e distribuição nodal permanece indispensável para evitar instabilidades numéricas que possam comprometer a precisão da solução e, eventualmente, da otimização.

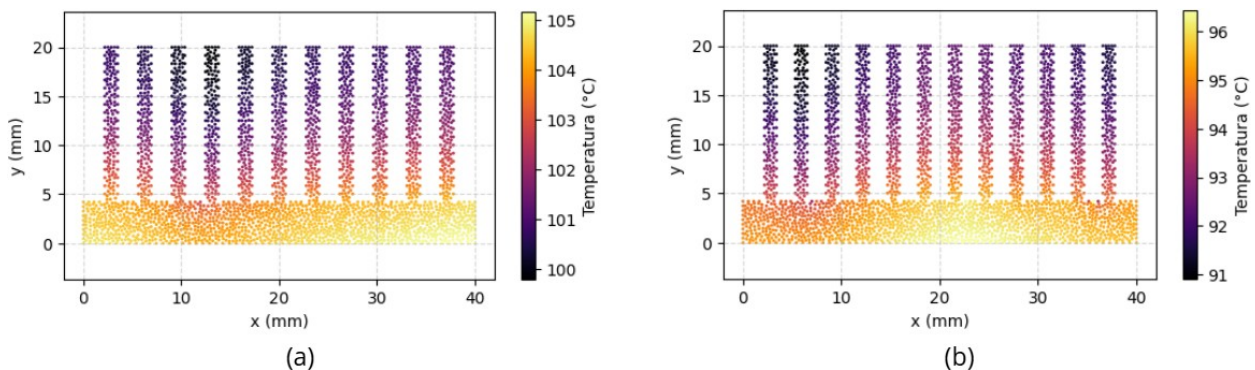


Figura 9 – Simulação do Dissipador de Calor para 65 W e $h_{ar} = 50\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$: (a) Distribuição de temperatura para arranjo com 11 aletas; (b) Distribuição de temperatura para arranjo com 12 aletas. /

Figure 9 – Heat Sink Simulation for 65 W e $h_{ar}=50\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$: (a) Temperature distribution for an 11-fin arrangement; (b) Temperature distribution for a 12-fin arrangement.

Para o cenário de alta potência 125 W , como o Core i9-14900K, foi necessário simular um sistema de resfriamento mais robusto, elevando o coeficiente para $h_{ar}=200\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$. A Figura 10 apresenta o campo térmico resultante, cujo resultado demonstra um aumento na eficiência das aletas promovido pelo acréscimo de transferência de calor por convecção. A principal vantagem reside no fato de que o desempenho pode ser avaliado e otimizado também sem modificar a geometria inicial. Possibilitando o estudo de soluções para projetos com limitações de espaço ou que dependem de dissipadores de calor com geometria padrão e alta disponibilidade no mercado.

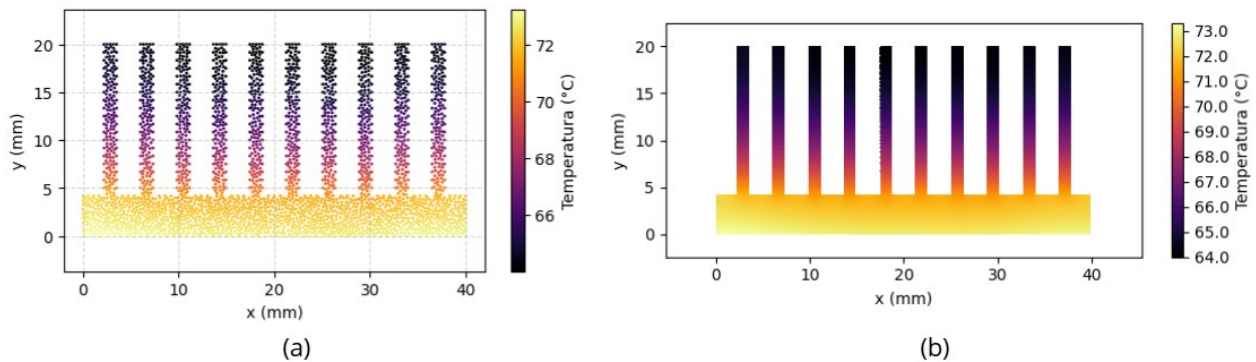


Figura 10 – Simulação do Dissipador de Calor 125 W e $h_{ar}=200\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$: (a) Distribuição de temperatura nos 3021 pontos gerados; (b) Campo térmico interpolado com a aplicação da máscara. /

Figure 10 – Heat Sink Simulation for 125 W e $h_{ar}=200\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$: (a) Temperature distribution at the 3021 generated points; (b) Interpolated thermal field with mask application.

Em todos os cenários, observou-se uma baixa diferença entre a temperatura mínima e máxima dentro do corpo do dissipador. Este comportamento é uma consequência direta da alta condutividade térmica do alumínio $k_{Al}=237\text{ W}/(\text{m K})$, que facilita a rápida distribuição do calor da base para as aletas. Tal característica apresentada pelo modelo proposto reforça a possibilidade de otimização do design construído, podendo-se avaliar também o comportamento de diferentes materiais condutores térmicos.

Os resultados obtidos não apenas elucidam o comportamento térmico do componente, mas também corroboram a eficácia do Método de Diferenças Finitas Generalizadas (MDFG) como uma ferramenta robusta para a engenharia térmica. A eliminação da etapa de geração de malha estruturada, um gargalo notório em métodos tradicionais como o de Diferenças Finitas (MDF), destaca-se como a principal vantagem competitiva desta abordagem, simplificando substancialmente

a análise de geometrias com topologia complexa, como a do dissipador aletado. Contudo, a aplicação prática do MDFG impõe desafios numéricos que exigem rigor metodológico. A estabilidade da solução é criticamente dependente da qualidade da discretização espacial. A presença de vazios ou a sobreposição excessiva de nós pode induzir instabilidades numéricas, resultando em soluções divergentes e sem sentido físico. Nesse contexto, a estratégia adotada neste trabalho, que integrou a geração de pontos com zonas de proteção (*buffer*) e restrição de distância mínima, provou-se fundamental para mitigar esses riscos e garantir a convergência do método.

Adicionalmente, a formulação matricial do problema exige atenção especial ao condicionamento numérico. A coexistência de propriedades físicas com ordens de grandeza distintas, como a condutividade térmica do alumínio e o coeficiente de convecção, demanda uma normalização cuidadosa durante a montagem do sistema global $[A][T]=[b]$ para preservar a precisão da solução. O emprego de estruturas de dados otimizadas, como o formato de armazenamento esparsa *Compressed Sparse Row* (CSR), mostrou-se indispensável para garantir a eficiência computacional no manuseio da matriz, especialmente em nuvens com alta densidade nodal. No âmbito do pós-processamento, a conversão da solução discreta em campos contínuos exigiu o uso de interpoladores robustos. A aplicação de interpolação cúbica aliada ao mascaramento geométrico foi essencial para a correta visualização das isotermas, respeitando as fronteiras físicas do domínio e facilitando a interpretação dos fenômenos de transporte.

Em suma, o MDFG consolidou-se como uma alternativa ágil e precisa para a simulação de problemas acoplados de condução e convecção em domínios irregulares. Do ponto de vista do projeto de engenharia, as simulações indicam que a geometria modelada apresenta desempenho marginalmente adequado para cargas térmicas de 45 W sob condições de convecção moderada. Para aplicações de maior potência, na faixa de 65 W ou superiores, os resultados sugerem a necessidade imperativa de otimização geométrica ou do incremento da convecção forçada, fornecendo diretrizes quantitativas valiosas para o dimensionamento de sistemas de gerenciamento térmico.

4. Conclusão / Conclusion

O presente trabalho desenvolveu e validou uma ferramenta computacional baseada no Método de Diferenças Finitas Generalizadas (MDFG) para a análise térmica de dissipadores de calor aletados. A implementação numérica, realizada em linguagem Python, demonstrou ser uma alternativa robusta e eficiente aos métodos tradicionais baseados em malha, superando as dificuldades de discretização em geometrias complexas.

A aplicação do algoritmo de *Poisson Disk Sampling* permitiu a geração de nuvens de pontos com distribuição uniforme e controle de distância mínima, eliminando a necessidade de malhas estruturadas ou transformações de coordenadas. A estabilidade numérica do método foi assegurada pela adoção de um esquema de conectividade local com estrelas de 9 nós, resolvido via Mínimos Quadrados Ponderados, o que mitigou problemas de condicionamento matricial frequentemente associados a métodos sem malha.

A etapa de validação, realizada através da comparação com a solução analítica para uma placa plana, comprovou a precisão do código desenvolvido. Os resultados mostraram uma concordância satisfatória com a série exata de Fourier, apresentando erros globais desprezíveis e discrepâncias localizadas apenas nas singularidades de borda, inerentes à física do problema de Dirichlet.

Na simulação do dissipador de calor aletado, a metodologia foi capaz de capturar os gradientes térmicos multidimensionais sob condições mistas de fluxo de calor (Neumann) e convecção (Robin). A técnica de pós-processamento com mascaramento geométrico facilitou a interpretação física dos resultados, permitindo a visualização clara do campo de temperatura no domínio sólido. Conclui-se, portanto, que o MDFG constitui uma ferramenta adequada para simulações de problemas de engenharia térmica, oferecendo flexibilidade geométrica e precisão adequada para o projeto e otimização de sistemas de resfriamento eletrônico.

Como desdobramentos futuros desta pesquisa, sugere-se a extensão da formulação para o domínio tridimensional (3D), o que permitiria analisar efeitos de borda longitudinal e a distribuição térmica em dissipadores com aletas piniformes ou geometrias não-extrudadas. Adicionalmente, a incorporação do termo de dependência temporal à equação governante possibilitaria a análise transiente, fundamental para avaliar a resposta do sistema a picos de carga térmica (*thermal throttling*) em processadores. Do ponto de vista numérico, recomenda-se a implementação de rotinas de refinamento adaptativo, onde a densidade da nuvem de pontos é ajustada automaticamente em função do erro local estimado, otimizando o custo computacional. Por fim, para uma representação mais fiel da física do resfriamento, propõe-se o acoplamento do solver de condução desenvolvido neste trabalho com modelos de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD). Essa abordagem de Transferência de Calor Conjugada permitiria calcular o coeficiente de convecção localmente em função do campo de velocidade do ar entre as aletas, substituindo a condição de Robin constante por uma interação fluido-estrutura dinâmica.

Agradecimentos / Acknowledgements

A Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e o Departamento de Engenharia Mecânica são reconhecidos pelo suporte institucional e acadêmico durante o desenvolvimento deste trabalho. Registra-se também o agradecimento ao professor orientador Dr. Douglas Martins Rocha, cuja orientação e contribuição técnica foram essenciais para a realização deste estudo.

Referências / References

BENITO, J. J.; UREÑA, F.; GAVETE, L. Influence of several factors in the generalized finite difference method. *Applied Mathematical Modelling*, v. 25, n. 12, p. 1039-1053, 2001.

FERREIRA, A. C. A.; RIBEIRO, P. M. V. Método sem malha com diferenças finitas generalizadas para solução de equações diferenciais parciais. In: XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE), Brasília, DF, 2016.

GU, Y.; WANG, L.; CHEN, W.; ZHANG, C.; HE, X. Application of the meshless generalized finite difference method to inverse heat source problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 108, p. 721-729, 2017.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 6. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007.

LENG, C.; WANG, X.-D.; WANG, T.-H.; YAN, W.-M. Optimization of thermal resistance and bottom wall temperature uniformity for double-layered microchannel heat sink. *Energy Conversion and Management*, v. 93, p. 141-150, 2015.

KAKAÇ, S.; YENER, Y.; NAVEIRA-COTTA, C. P. Heat Conduction. 5. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.

LISZKA, T.; ORKISZ, J. The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers & Structures*, v. 11, n. 1-2, p. 83-95, 1980.

GANAPATHY, D. et al. Defining thermal design power based on real-world usage models, 2008 11th Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems, Orlando, FL, USA, 2008, pp. 1242-1246, doi: 10.1109/ITHERM.2008.4544402.

ROCHA, J. P. A. S.; LOUREIRO, M. M. S.; LOUREIRO, F. S. Método de Diferenças Finitas Generalizadas Aplicado à Equação de Biotransferência de Calor. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

SRIDHAR, A.; MADHOUR, Y.; ATIENZA, D.; BRUNSCHWILER, T.; THOME, J. **STEAM**: a fast compact thermal model for two-phase cooling of integrated circuits. In: Proceedings of the International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD), San Jose, CA, p. 256-263, 2013.

TUCKERMAN, D. B.; PEASE, R. F. W. High-performance heat sinking for VLSI. IEEE Electron Device Letters, v. 2, n. 5, p. 126-129, 1981.

Intel Corporation. Intel Product Specification Site (ARK). Disponível em: [https://www.intel.com/content/www/us/en/ark.html#@PanelLabel122139]. Acesso em: [25 nov. 2025].